UNIVERSITE NATIONALE DES SCIENCES, TECHNOLOGIES, INGENIERIE ET MATHEMATIQUES
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE GENIE MATHEMATIQUE ET MODELISATION
(ENSGMM UNSTIM)

DEVOIR DE STATISTIQUE INFERENTIELLE

Niveau: Génie Mathématique et Modélisation 2
Année académique: 2019-2020
Durée: 3h
Calculatrice interdite.
Langage **R** exigé. Les syntaxes utilisées doivent être présentées.
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
NB: Le corrigé-type sera disponible après la composition à l'adresse:
sites.google.com/view/nicodemeatchade/

Enseignant: Dr ATCHADE Nicodème

1 Exercice 1.

I. Soient $X1, ..., X_n$ des v.a. indépendantes et de même loi exponentielle $\varepsilon(\lambda)$.

1. Donner l'estimateur $\widehat{\lambda}$ de λ par la méthode des moments.
2. Montrer que $\widehat{\lambda}$ est biaisé.
3. Trouver un estimateur $\hat{\lambda}'$ sans biais de λ.
4. Montrer que $\widehat{\lambda}'$ est convergent, asymptotiquement efficace, mais pas efficace.

II. On considère un échantillon de taille n de la loi de Laplace $\mathfrak{L}(\theta)$, définie par la densité:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x;\theta) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}$$

Calculer les estimateurs des moments et de maximum de vraisemblance de θ.

2 Exercice 2.

Dans une ville donnée on a mesuré le niveau des revenus annuels en millions de roubles russes de 20 chefs d'entreprises florissantes prises au hasard. Les données ordonnées sont les suivantes :
54.8 55.4 57.7 59.6 60.1 61.2 62.0 63.1 63.5 64.2 65.2 65.4 65.9 66.0 67.6 68.1 69.5 70.6 71.5 73.4

1. Donner la moyenne de cet échantillon et son intervalle de confiance au seuil de 5%.
2. Construire un histogramme à classes de même amplitude. En déduire que la loi normale est une loi de probabilité vraisemblable pour le revenu des entrepreneurs de cette ville. Confirmer ce résultat à l'aide d'un graphe de probabilités.
3. On suppose donc que cet échantillon est issu d'une loi normale.
   3.1. Donner les paramètres de cette loi.
   3.2. Estimer la probabilité que le revenu dépasse 69 millions de roubles.
   3.3. La municipalité a décidé de créer une taxe pour les 5% d'entrepreneurs les plus riches. Comment déterminer le revenu limite au delà duquel les entrepreneurs concernés seront taxés ?

3 Exercice 3.

I. Afin de tester une solution toxique, on fait des injections à un groupe de 80 souris. On admet que l'injection est mortelle dans 80% des cas. Le fait que 22 souris ne soient pas mortes est-il compatible au seuil 5% avec cette hypothèse ?
II. On étudie la dépendance à un médicament. Une région du cerveau, appelée VTA, contient des récepteurs (GABA-A) qui, exposés à l'enzyme anhydrase carbonique contrôlent le basculement d'un état de non-accoutumance à un état d'accoutumance. Chez les sujets à risque, le dosage de l'activité de cet enzyme suit une loi normale d'espérance 10,7 et d'écart-type inconnu. Une série de dosages effectués sur une même personne a donné :
12.9 8.7 9.0 1.2 2.7 9.7 9.1 10.3.
Cette personne peut-elle être considérée comme à risque ?

Bonne chance !